Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2018
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei
Proba scrisă la matematică

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Se consideră numărul complex $z = \dfrac{1-i}{1+i}$. Calculaţi $|z|^{2018}$.

5p 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-4x+4} = 1$.

5p 3. Calculaţi suma $1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots + (-1)^{2018}$.

5p 4. Determinaţi numărul natural $n \geq 2$, pentru care

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 16.$$

5p 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,0)$ şi $B(2,0)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $C(2,2)$ şi este paralelă cu dreapta AB.

5p 6. Arătaţi că oricare ar fi numărul real x,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \cdot \cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \cdot \sin 2x = 1.$$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 3-x & 0 & x-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3(1-x) & 0 & 3x-1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p a) Determinaţi matricea $A(1) + A(3)$.

5p b) Determinaţi matricea $A(1)^{2018}$.

5p c) Arătaţi că $\det(A(x) \cdot A(-x)) \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X + 2$ şi fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p a) Calculaţi suma $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

5p b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X + 1$.

5p c) Arătaţi că polinomul f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \sqrt{x} \ln x$.

5p a) Calculaţi $f'(x)$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

5p b) Determinaţi punctele de inflexiune ale graficului funcţiei f.

5p c) Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.

2. Se consideră funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$.

5p a) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

5p b) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

5p c) Arătaţi că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{11}{9} - \frac{\pi}{8}$.

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Universitatea din Craiova
Facultatea de Automatică, Calculatoare şi Electronică
Examen de admitere la licenţă - Sesiunea iulie 2018
Domeniul Calculatoare şi Tehnologia Informaţiei

Proba scrisă la matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $|z| = \dfrac{|1-i|}{|1+i|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ **2p**
$|z|^{2018} = 1$ **3p**

2. $\sqrt{x^2-4x+4} = |x-2|$ **2p**
Ecuaţia devine $x-2=\pm 1$ **1p**
Soluţiile sunt $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$ **2p**

3. $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dacă $q \neq 1$ **2p**
Suma este egală cu 1 .... **3p**

4. $1+n+\dfrac{n(n-1)}{2} = 16$ **1p**
$n = 5$ **4p**

5. $y - y_C = m_{AB}(x - x_C)$ **2p**
Panta dreptei AB este 0 .... **1p**
Ecuaţia dreptei este $y = 2$ **2p**

6. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **2p**
$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.

a) $A(1) + A(3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ **5p**

b) $A(1) = 2I_3$ **3p**
$A(1)^{2018} = 2^{2018} I_3$ **2p**

c) $\det(A(x)\cdot A(-x)) = \det(A(x))\cdot\det(A(-x))$ **2p**
$\det(A(x)) = 8x$ **1p**
$\det(A(-x)) = -8x$ **1p**
$\det(A(x)\cdot A(-x)) = -64x^2 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **1p**

2.

a) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2$, $S_3 = x_1x_2x_3 = -2$ **3p**

$S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = 0 - 2 \cdot 2 = -4$ **2p**

b) Câtul este $q = X^2 - X + 3$ **3p**

Restul este $r = f(-1) = -1$ **2p**

c) Dacă presupunem că f are toate rădăcinile reale, atunci trebuie ca $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$.

Dar $S = -4 < 0$. Contradicţie ! Rezultă că presupunerea făcută este falsă.................. **3p**

Concluzia că f are o rădăcină reală şi două rădăcini complexe **2p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.

a) $f'(x) = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, \infty)$ **5p**

b) $f''(x) = -\dfrac{\ln x}{4x\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, \infty)$ **3p**

$x = 1$ singurul punct de inflexiune **2p**

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)^{\frac{1}{x}} = 0$ **5p**

2.

a) $2\ln 2 - \dfrac{17}{12}$ **5p**

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{2x}$ **3p**

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{2x} = 0$ **2p**

c) $f(x) \leq 0$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **1p**

$\ln(x+1) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$, $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **1p**

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x)\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \dfrac{\sin^2 x}{2} + \dfrac{\sin^3 x}{3}\right) dx$ **2p**

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x)\,dx \leq \dfrac{11}{9} - \dfrac{\pi}{8}$ **1p**